

## 第二章 光学信息处理的基本原理

光学信息处理在数学上主要基于付里叶变换、相关、卷积积分等数学运算，在物理上主要基于物理光学和几何光学的若干概念，比如光的干涉和衍射，光学传递函数，透镜的付里叶变换性质等等。另外，它和全息照相，记录介质（目前大多数使用摄影胶片）的性质密切相关。掌握和熟悉光学信息处理技术，首先必须具备一些数学知识和必要的物理概念。

### I 数学基础

#### 1. 付里叶级数

一个周期函数  $f(x)$ ，如果它在区间  $[\pi, -\pi]$  内连续或者具有有限个第一类间断点，则可展开为付里叶级数。

$$y = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos nx + B_n \sin nx\} \quad (2-1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

对于函数  $f(x)$  在区间  $[\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}]$  连续或者具有有限个第一类间断点的一般情况，则有

$$y = f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{2n\pi}{l} x + B_n \sin \frac{2n\pi}{l} x \right\} \quad (2-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } A_0 &= \frac{1}{l} \int_l f(x) dx \\ A_n &= \frac{2}{l} \int_l f(x) \cos \frac{2n\pi}{l} x dx \\ B_n &= \frac{2}{l} \int_l f(x) \sin \frac{2n\pi}{l} x dx \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

把付里叶三角级数转变成指数形式对于运算是十分有用的。根据尤拉公式

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} \quad (2-5)$$

式中,  $j = \sqrt{-1}$ , 它表示虚数单位。设  $x = \omega t$ ,  $\omega$  为角频率或者圆频率,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  为函数的周期。这样一来,  $f(x) = f(\omega t) = g(x)$ ,  $dx = \omega dt$ 。经过一些简单的运算和归纳, 可以得到付里叶级数的指数形式:

$$y = g(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) d\tau + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{\infty} \right] \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t} \quad (2-6)$$

对于上式的第一项, 我们有

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) d\tau = \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t} \Big|_{n=0}$$

由此, 公式(2-6)可简化为:

$$y = g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t} \quad (2-7)$$

这就是付里叶级数的指数形式。

## 2. 付里叶积分

付里叶级数展开适用于函数的周期为有限大的情况。当函数的周期变为无穷大时, 付里叶级数就导致了付里叶积分。周期变大, 频率就变低, 当周期趋于无穷大时, ( $T \rightarrow \infty$ ), 则基本圆频率  $\omega \rightarrow 0$ 。由付里叶级数表达式知道: 每次谐波都是基频的整数倍。因此随着基频趋于零, 各次谐波之间的间隔也趋于零。

由前知  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , 因此当  $T \rightarrow \infty$  时,  $\omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$ 。这样一来, 当  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi}$ ,  $\lim$

$n\omega \rightarrow \omega$  时, 公式(2-7)中的  $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}$  变为

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} = \sum_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (2-8)$$

把(2-8)式代入(2-7)式中得出:

$$y = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega \quad (2-9)$$

公式(2-9)就是付里叶积分的指数形式。

### 3. 付里叶变换

在公式(2-9)中, 如果我们令

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-10)$$

那么公式(2-9)变为

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-11)$$

在数学上就把函数 $G(\omega)$ 定义为函数 $g(t)$ 的付里叶变换, 而把 $g(t)$ 定义为 $G(\omega)$ 的逆付里叶变换。

上面讨论的是单变量情况, 对于双变量, 可以自然地加以扩展。设一个双变量函数 $f(x, y)$ , 它的付里叶变换可以表达为

$$F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{x p[-2\pi j(ux + vy)]} dx dy \quad (2-12)$$

式中 $(u, v)$ 为频率域坐标, 它们和角频率或圆频率的关系为:  $u = \frac{\omega_x}{2\pi}$ ,  $v = \frac{\omega_y}{2\pi}$ 。而 $F(u, v)$ 的逆付里叶变换为

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{x p[2\pi j(ux + vy)]} dudv \quad (2-13)$$

公式(2-12)和(2-13)在数学上存在的充分条件是: (1) 函数 $f(x, y)$ 在无限大的 $(x, y)$ 面中是绝对可积的, 即 $\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy$ 存在; (2) 函数 $f(x, y)$ 必须具有有限个间断点, 且在任何有限的矩形中具有有限的极大值和极小值; (3) 函数 $f(x, y)$ 必须没有无限大的间断。实际上, 大多数物理量不一定完全具备这三个条件, 但是附加一些假定之后, 还是可以应用的。

付里叶变换用来把一个给定的函数分解成它的指数分量。函数 $g(t)$ 的付里叶变换表示构成函数 $g(t)$ 的各个频率分量的振幅和相位。一个时间函数经过付里叶交换之后转变成频率函数。在光学中, 我们通常对空间函数 $f(x, y)$ 和它的付里叶变换 $F(u, v)$ 感兴趣。一个函数的空间域表示说明该函数的振幅是位置的函数, 而它的频率域表达说明该函数的振幅和相位是频率的函数。这些表达式中的每一个都唯一地表征这个函数。

函数 $g(t)$ 的付里叶变换 $G(\omega)$ 可以用三角函数表达

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{x p[-j\omega t]} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \end{aligned}$$

当 $g(t)$ 是偶函数时,  $\sin \omega t = 0$ , 因此

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad (2-14)$$

公式(2-14)称为付里叶余弦变换。当函数 $g(t)$ 是奇函数时,  $\cos \omega t = 0$ , 则有

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad (2-15)$$

公式(2-15)称为付里叶正弦变换。

#### 4. 付里叶变换的基本性质

下面列出的付里叶变换的基本性质可在很多专著中找到<sup>[1][2][3]</sup>，这里不证。

##### (1) 线性定理

$$F\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} = \alpha \cdot F[f(x, y)] + \beta \cdot F[g(x, y)] \quad (2-16)$$

式中 $F$ 表示付里叶变换， $\alpha$ ， $\beta$ 是常数。上式表明，两个函数的和的付里叶变换等于各个函数的付里叶变换之和。

##### (2) 相似性定理

若 $F[g(x, y)] = G(u, v)$ ，则有

$$F[g(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (2-17)$$

这表明，在空间域中，坐标 $(x, y)$ 分别延伸某一个量，其结果导致频率域中的坐标 $(u, v)$ 缩短同样的量，再加上频谱的整个振幅的变化。

##### (3) 位移定理

如果 $F[g(x, y)] = G(u, v)$

$$\text{那么 } F[g(x-a, y-b)] = G(u, v) e^{-j2\pi(ua+vb)} \quad (2-18)$$

这就是说，函数在空间域的位移引起在频率域中的线性相位移动。

##### (4) 泊塞瓦尔(Parseval)定理

如果 $F[g(x, y)] = G(u, v)$

$$\text{那么 } \iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(u, v)|^2 du dv \quad (2-19)$$

这就是说，不论在空间域中，还是在频率域中，能量是守恒的。

##### (5) 函数的复数共轭的付里叶变换

该函数 $g(x, y)$ 的共轭函数为 $g^*(x, y)$

$$\text{则 } F[g^*(x, y)] = G^*(-u, -v) \quad (2-20)$$

##### (6) 付里叶积分定理

在函数 $g(x, y)$ 的连续性的每一点处，有下面的关系，

$$F F^{-1}[g(x, y)] = F^{-1} F[g(x, y)] = g(x, y) \quad (2-21)$$

此式表明, 函数的持续的变换与逆变换仍然得出该函数, 在间断点处除外。

上面的付里叶变换性质远远超出它们的理论意义。它们应用得十分广泛, 因为它们为付里叶变换的运算提供了基本工具, 并且在介决付里叶分析问题中能节省大量的计算工作。

## 5. 卷 积 积 分

卷积积分被定义为:

$$f(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(x' - x, y' - y) dx dy \quad (2-22)$$

上式可表示为符号形式

$$f(x', y') = f_1(x, y) \otimes f_2(x, y) \quad (2-23)$$

式中 $\otimes$ 是卷积符号。

这是光学上的一种非常重要的数学运算。当光学系统被近似为线性空间不变的时, 则其物像关系可用卷积积分表达。若 $O(x, y)$ 是物面函数,  $h(x, y)$ 是光学系统的点扩散函数, 那么像面函数 $i(x', y')$ 可表示为

$$i(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} O(x, y) h(x' - x, y' - y) dx dy \quad (2-24)$$

## 卷 积 定 理

如果  $F[f_1(x, y)] = F_1(u, v)$

$$F[f_2(x, y)] = F_2(u, v)$$

那么

$$F \left[ \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(x' - x, y' - y) dx dy \right] = F_1(u, v) F_2(u, v) \quad (2-25)$$

这就是说, 两个函数的卷积的付里叶变换等于两个函数的付里叶变换的乘积。利用卷积定理我们可以把(2-24)表达的物像关系写为:

$$I(u, v) = O(u, v) H(u, v) \quad (2-26)$$

式中 $H(u, v)$ 就是通常所说的光学传递函数( $O.T.F.$ )。

## 6. 相 关 函 数

根据定义, 自相关函数 $\varphi_r(x', y')$ 由下式给出

$$\varphi_{11}(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_1^*((x' + x, y' + y)) dx dy \quad (2-27)$$

当 $f_1(x, y)$ 是实函数时, 上式变为

$$\psi_{11}(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_1(x' + x, y' + y) dx dy \quad (2-28)$$

互相关函数可表达为

$$\varphi_{12}(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2^*(x' + x, y' + y) dx dy \quad (2-29)$$

当 $f_1(x, y)$ 与 $f_2(x, y)$ 是实函数时, 上式变为

$$\varphi_{12}(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(x_1 + x, y' + y) dx dy \quad (2-30)$$

在相干光学信息处理中, 相关运算是图像识别和信号探测的数学基础。它是度量两个函数间的相似程度的。

## 自相关定理

如果  $F[f(x, y)] = F(u, v)$

$$\text{那么 } F\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) f^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right] = |F(u, v)|^2 \quad (2-31 a)$$

同理

$$F[|f(\xi, \eta)|^2] = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) F^*(\xi - u, \eta - v) d\xi d\eta \quad (2-31 b)$$

这个定理可看作是卷积定理的特殊情况。

## 相关函数的变换

让我们考虑下面两个函数的乘积

$$F_1 F_2^*$$

上式中  $F[F_1] = f_1$ ,  $F[F_2] = f_2$

我们想得出对于乘积 $F_1 F_2^*$ 的付里叶变换的表达。由卷积定理我们知道

$$\begin{aligned} F[F_1 F_2^*] &= f_1(x, y) \otimes f_2^*(-x, -y) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2^*[x - (-x'), y - (-y')] dx' dy' \end{aligned}$$

也就是说

$$f_1(x, y) \otimes f_2^*(-x, -y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2^*(x + x', y + y') dx' dy'$$

根据方程(2-29), 上面方程可以看作为相关函数 $\varphi_{12}(x', y')$ 。因此我们可以写为:

$$F[F_1 F_2^*] = f_1(x, y) \otimes f_2^*(-x, -y) = \varphi_{12}(x', y')$$

又  $\varphi_{12}(x', y') = f_1(x, y) \star f_2^*(x, y)$

式中 $\star$ 是相关运算的符号。最后, 我们得出下面的方程

$$F[F_1 F_2^*] = f_1 \star f_2^* \quad (2-32)$$

这就是相关函数的变换。

## 7. 一些典型函数及其付里叶变换

在光学信息处理中, 下面的几种函数很有用, 通过赋予它们以特殊的标号可以节省时间和精力。

(1) 矩形函数 (Rectangle Functions)

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他值} \end{cases}$$

它的付里叶变换为

$$F[\text{rect}(x)] = \text{sinc}(u)$$

(2) sinc 函数 (sinc function)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

它的付里叶变换为

$$F[\text{sinc}(x)] = \text{rect}(u)$$

(3) 符号函数 (signal function)

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

它的付里叶变换为

$$F[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi u}$$

(4) 三角函数 (Triangle function)

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{其他值} \end{cases}$$

它的付里叶变换为

$$F[\Delta(x)] = \text{sinc}^2(u)$$

(5) 梳函数 (Comb function)

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

它的付里叶变换为

$$F[\text{comb}(x)] = \text{Comb}(u)$$

(6) 高斯函数 (Gaussian function)

$$f(x) = e^{-a^2 x^2 / 2}$$

它的付里叶变换为

$$F[f(x)] = F[e^{-a^2 x^2 / 2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-4\pi^2 u^2 / 2a^2}$$

上面的六个函数表示在图2—1中，它们仅仅是一个独立变量的函数，对于在两维空间上的各种可分离的变量的函数可用使这些函数相乘的方法来构成。

(7) 园函数 (Circle function)

$$\text{Circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{其他值} \end{cases}$$

这是一个双变量函数，如图2—2所示。它的付里叶变换不能用简单的变量分离的方法求得。由于这个函数在光学中十分重要，因此我们求出它的付里叶变换。

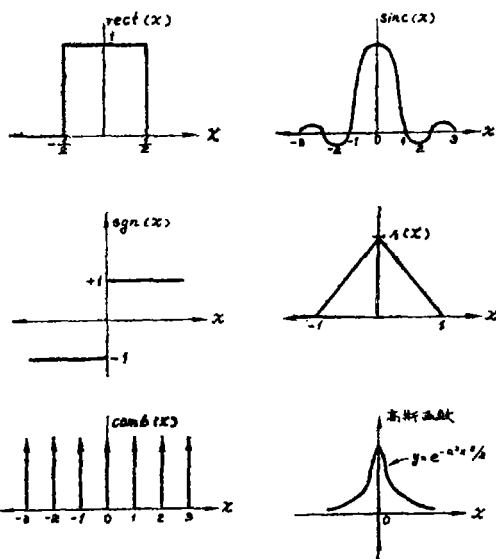


图2—1 一些特殊函数

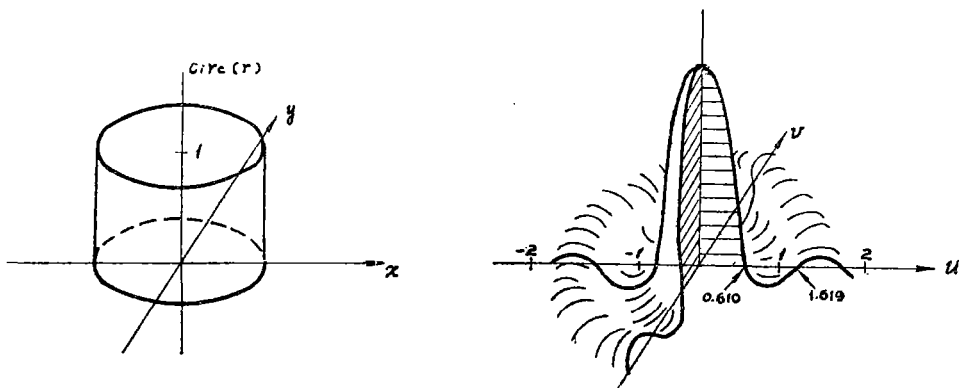


图2-2 圆函数和它的变换

由前知

$$\text{Circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 应用付里叶—贝塞尔 (Fourier—Bessel) 变换表达式

$$G_D(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r g(r) J_0(2\pi r \rho) dr$$

可得出圆函数的变换

$$F[\text{circ}(r)] = 2\pi \int_0^1 r J_0(2\pi r \rho) dr$$

应用变换代换  $r' = 2\pi r \rho$  和恒等式

$$\int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x)$$

则可将上面的变换写为

$$F[\text{Circ}(r)] = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi\rho} r' J_0(r') dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} \quad (2-33)$$

式中  $J_1$  是一类一级贝塞尔 (Bessel) 函数。图2-2表示这个圆函数和它的付里叶变换。

由此可见, 圆对称函数的付里叶变换也是圆对称的。并且它是由中心的尖峰和一系列共心的振幅递减的环所组成的, 另外, 该变换的另值点并不是等间隔的。

### (8) 狄拉克 (Dirac) $\delta$ 函数

广泛地应用于电路分析中的一维狄拉克  $\delta$  函数可以定义为一系列具有递减的宽度, 递增的高度和单位面积的极限。对一维情况, 它可定义为:

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi t^2)$$

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{rect}(Nt)$$

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{sinc}(Nt)$$

一般地, 在电路分析中用  $\delta$  函数来表示电流或电压的锐利的强度脉冲。在光学中常常用来表征点光源和具有单位面积的空间脉冲。此时, 通常是二维的, 它可定义为

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{rect}(Nx) \text{rect}(Ny)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{sinc}(Nx) \text{sinc}(Ny)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\pi} \text{circ}(N\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{J_1(2\pi N\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

根据使用要求可以选择最合适的  $\delta$  函数表达式的形式。图2-3是一维  $\delta$  函数的一个例子。 $\delta$  函数具有下面的基本性质

$$\delta(x, y) \begin{cases} \infty & x = y = 0 \\ 0 & \text{其他值} \end{cases} \quad (2-34)$$

$$\iint_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1$$

$$\varepsilon \text{ 为大于另的任何值} \quad (2-35)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x-a, y-b) dx dy = f(a, b) \quad (2-36)$$

$$\delta(-x, -y) = \delta(x, y) \quad (2-37)$$

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|a| |b|} \delta(x, y) \quad (2-38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b) \quad (2-39)$$

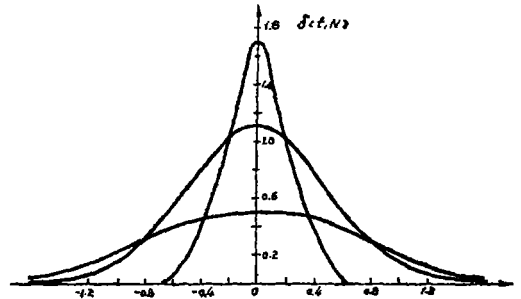


图2-3 说明  $\delta$  函数的意义，函数为  $\delta(t, N) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} e^{-N^2 t^2}$ ，当  $N=1, 2, 4$  时每一直线下的面积为1。

表2-1 一些特殊函数的付里叶变换对

函 数	变 换
$\exp[-\pi(x^2 + y^2)]$	$\exp[-\pi(u^2 + v^2)]$
$\text{rect}(x)\text{rect}(y)$	$\text{sinc}(u)\text{sinc}(v)$
$\lambda(x)\lambda(y)$	$\text{sinc}^2(u)\text{sinc}^2(v)$
$\delta(x, y)$	1
$\exp[i\pi(x, y)]$	$\delta(u - \frac{1}{2}, v - \frac{1}{2})$
$\text{sgn}(x)\text{sgn}(y)$	$\frac{1}{j\pi u} \cdot \frac{1}{i\pi v}$
$\text{comb}(x)\text{comb}(y)$	$\text{comb}(u)\text{comb}(v)$
$\text{circ}(r)$	$\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$

## II 光学透镜的付里叶变换性质

### 1. 标量衍射理论的近似

本节的内容试图表明：付里叶变换是标量衍射理论的近似表达。如图2—4所示， $P_2$ 为点源， $\Sigma$ 为一平面屏，当我们想要求出由平面屏 $\Sigma$ 引起的在 $P_0$ 点处的光扰动时，可应用瑞利——沙麦菲尔德 (Royleigh—Sommerfeld) 衍射公式<sup>[2]</sup>

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21} + r_{01})]}{r_{21} r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) ds \quad (2-40)$$

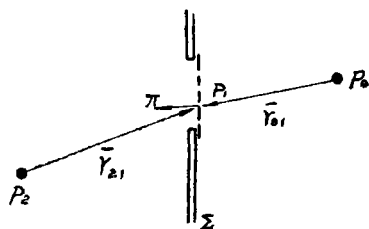


图2—4 标量衍射

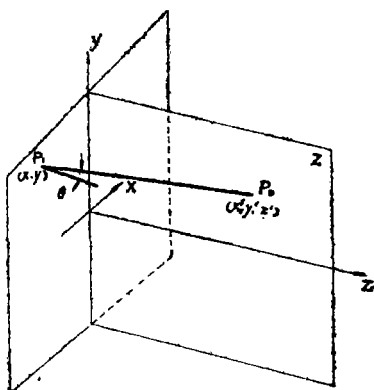


图2—5 衍射公式中，各个量的物理意义

式中各符号的意义在图2—4中标明。在光学信息处理中，入射到屏上的波绝大多数为平面波（即  $r_{21} \rightarrow \infty$ ），这样一来，屏之上的光振幅透过为  $Af(x, y)$ ，这里  $A$  表示入射到屏上的平面波振幅，是表征屏的透光能力的函数。再设  $P_0$  点的坐标为  $(x', y', z')$ ，光扰动为  $U(x', y', z')$ ，则公式 (2—40) 可写为

$$U(x', y', z') = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} Af(x, y) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) dx dy \quad (2-41)$$

式 (2—41) 中， $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$  通常称为倾斜因子，它的物理意义如图2—5所示。如果我们在屏后面放一个焦距为  $f$  的透镜，并且我们希望求出透镜后焦面上的某一点的光扰动，那么

$$\cos(n, r_{01}) = \frac{f}{(f^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

由此看出，倾斜因子和屏的坐标  $(x, y)$  无关，可把它提到积分之外。这样一来，公式 (2—41) 变为

$$U(x', y', z') = \frac{Af}{j\lambda (f^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \iint_{\Sigma} \frac{f(x, y) \exp(jkr)}{r} dx dy \quad (2-42)$$

现在我们将应用图2—6来确定由平面 $\Sigma$ 中的任意一点  $(x, y)_A$  到平面 $F'$ 中的任意一点  $(x', y')_B$  的光程长度表达式。 $\overline{CO}$ 表示主光线，平面 $\rho'$ 垂直于主光线和所有平行于主

光线的射线。对于主光线的光程长度  $r$  由下式给出

$$r = l_1 + l_2 + l_3 \quad (2-43)$$

由图2-6可知

$$l_1 = (f^2 + \rho_B^2)^{1/2}$$

$$l = \frac{df}{l_1}$$

这样一来，由平面  $p'$  到平面  $F'$  中的点  $(x', y')_B$  的主光线长度为：

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= l_1 + \frac{df}{l_1} \\ &= \frac{f^2 + \rho_B^2 + df}{(f^2 + \rho_B^2)^{1/2}} \quad (2-44) \end{aligned}$$

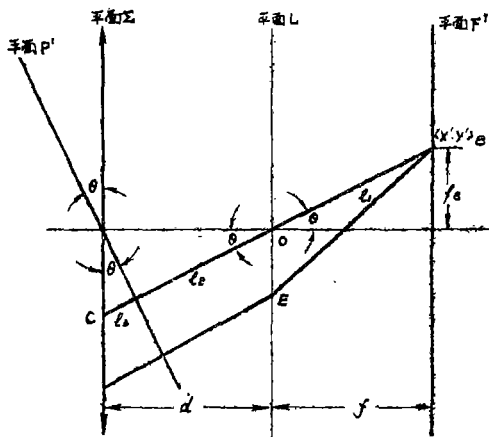


图 2-6 光程长度的度量

我们假定：对于所有平行于主光线的光线，它们由于面  $p'$  到主光线与焦面  $F'$  的交点间的距离是相等的，即  $l_1 + l_2$  对于所有平行于主光线的光线都相等。对于由平面  $\Sigma$  到平面  $F'$  的主光线的光程长度  $r$ ，它等于

$$r = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{f^2 + \rho_B^2 + df}{(f^2 + \rho_B^2)^{1/2}} + l_3$$

由图2-6可求出  $l_3 = \rho_1 \sin\theta$ ，而  $\sin\theta = \frac{\rho_B}{l_1} = \frac{\rho_B}{(f^2 + \rho_B^2)^{1/2}}$ ，

这样， $l_3 = \frac{\rho_1 \rho_B}{(f^2 + \rho_B^2)^{1/2}}$ 。由此

$$r = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{f^2 + \rho_B^2 + df + \rho_1 \rho_B}{(f^2 + \rho_B^2)^{1/2}} \quad (2-45)$$

又因[4]  $\rho_1 = \frac{-x'x - y'y}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}$

把  $\rho_1$  代入(2-45)中我们得到

$$r = \frac{f^2 + x'^2 + y'^2 + df - x'x - y'y}{(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}} \quad (2-46)$$

为了便于讨论，可把(2-46)写为

$$r = R(x', y') - \alpha x - \beta y \quad (2-47)$$

其中  $R(x', y') = \frac{f^2 + x'^2 + y'^2 + df}{(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}$

$$\alpha = \frac{x'}{(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

$$\beta = \frac{y'}{(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

把公式(2-46)和(2-47)代入衍射公式(2-42)中，得到

$$U(x', y') = \frac{Af}{j\lambda(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}} \iint_{\Sigma} f(x, y) \frac{\exp\{jk[R(x', y') - \alpha x - \beta y]\}}{\frac{f^2 + x'^2 + y'^2 + df - x'x - y'y}{(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}} dx dy$$

$$= \frac{A f \exp[jkR(x', y')]}{jx} \iint_{\Sigma} f(x, y) \frac{\exp[-jk(ax + \beta y)]}{f^2 + x'^2 + y'^2 + df - x'x - y'y} dx dy \quad (2-48)$$

我们把常数  $(f^2 + df)$  由 (2-48) 中的积分号内提出来, 得到

$$U(x', y') = \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} f(x, y) \frac{\exp[-2\pi j(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y)]}{1 + \frac{x'^2 + y'^2 - x'x - y'y}{(f^2 + df)}} dx dy \quad (2-49)$$

我们令

$$u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x'}{\lambda(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

$$v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y'}{\lambda(f^2 + x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

根据二项式展开

$$u = \frac{x'}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{x'^2 + y'^2}{2f^2} + \dots \right]$$

$$v = \frac{y'}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{x'^2 + y'^2}{2f^2} + \dots \right]$$

当  $\frac{x'^2 + y'^2}{2f^2} \ll 1$  时, 则  $u, v$  可近似表达为

$$u = \frac{x'}{\lambda f}, \quad v = \frac{y'}{\lambda f} \quad (2-50)$$

这样一来, 公式 (2-49) 可写为

$$U(x', y') = \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} f(x, y) \frac{\exp[-2\pi j(ux + vy)]}{1 + \frac{x'(x' - x) + y'(y' - y)}{f(f+d)}} dx dy \quad (2-51)$$

令  $M = x'(x' - x) + y'(y' - y), N = f(f + d)$

则公式 (2-51) 积分号内的分母可写为

$$\frac{1}{N - \frac{M}{N}} = \frac{1 + \frac{M}{N} - \frac{M}{N}}{1 + \frac{M}{N}} = 1 - \frac{\frac{M}{N}}{1 + \frac{M}{N}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{N}{M}}$$

经过这样转换之后, 公式 (2-51) 变为:

$$\begin{aligned}
 U(x', y') &= \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} f(x, y) \\
 &\quad \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{x'(x'-x) + y'(y'-y)}} \right] \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy \\
 &= \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} f(x, y) \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy \\
 &\quad - \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} \frac{f(x, y)}{1 + \frac{f(f+d)}{x'(x'-x) + y'(y'-y)}} \\
 &\quad \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy \quad (2-52)
 \end{aligned}$$

当我们限制 $\Sigma$ 面中的 $(x, y)$ 值(入瞳直径)和 $F'$ 面中的 $(x', y')$ 值(视场范围),使公式(2-52)中的第二项同第一项相比是可以忽略的,这样一来公式(2-52)变为

$$U(x', y') = \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{\Sigma} f(x, y) \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy$$

如果我们假定在 $\Sigma$ 面中的孔径以外的部分 $f(x, y)$ 为另,这样可把积分域扩展为 $\pm \infty$ 而不改变积分值,因此上式变为

$$U(x', y') = \frac{A \exp[jkR(x', y')]}{j\lambda(f+d)} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy \quad (2-53)$$

这个公式和(2-12)相比,除了二者的积分号前的系数不同外,是完全相同的。实际上公式(2-53)是函数 $f(x, y)$ 的付里叶变换同一个附加相位因子的乘积。由此可见,经过若干近似之后,标量衍射公式可以转变为付里叶变换表达式。

A. R. 苏尔曼(Shulman)对公式(2-53)的精确程度和使用范围作了详细的讨论<sup>[4]</sup>。例如对于用公式(2-50)表达的空间频率,如果要求频率误差小于1%,那么视场范围的限制为 $\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{f} = 0.14$ ,也就是说,如果透镜焦距为1米,则视场被限制在140毫米之内,如图2-7所示。

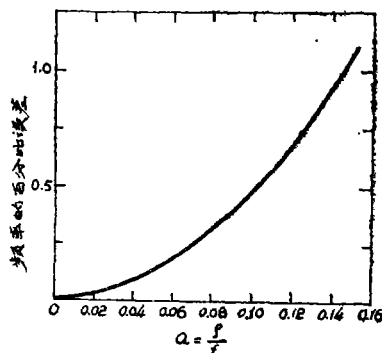


图2-7 在线性频率近似中的百分比误差

## 2. 透镜的付里叶变换性质

参照图2-8,设透镜的最大厚度为 $\Delta$ 。而在透镜的坐标 $(x, y)$ 处的厚度为 $\Delta(x, y)$ ,那么光波在坐标 $(x, y)$ 处通过透镜时所引起的总相位迟滞为

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$$

式中,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $n$ 为透镜材料的折射率,  $kn\Delta(x, y)$ 是由透镜引起的相位迟滞,而

$k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$  是两顶点的切平面间所剩下的自由空间所引起的相似迟滞, 完全等价地, 上式可表达为指数形式

$$t_i(x, y) = \exp[jk\Delta_0] \exp[jk(n-1)\Delta(x, y)] \quad (2-54)$$

刚刚穿过透镜后的瞬时平面的复数场  $U'_i(x, y)$  和入射到透镜的前平面上的复数场  $U_i(x, y)$  之间有下面的关系

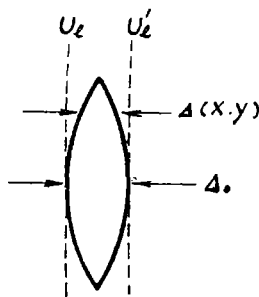


图2-8 厚度函数

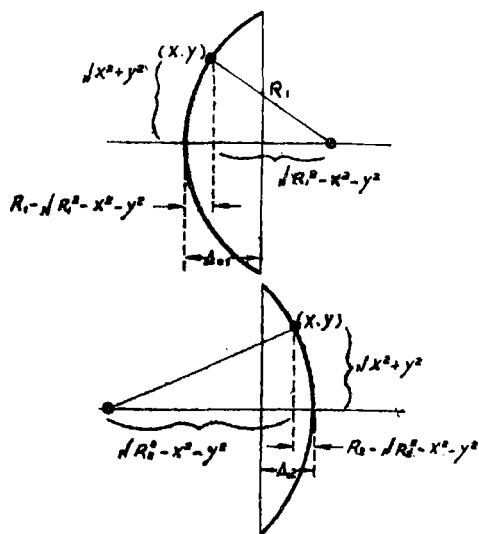


图2-9 厚度函数的计算

$$U'_i(x, y) = t_i(x, y)U_i(x, y) \quad (2-55)$$

让我们把图2-8所示的透镜分成两部分, 如图2-9所示, 其目的是求出透镜的厚度函数  $\Delta(x, y)$ ,

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) \quad (2-56)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(x, y) &= \Delta_{01} - (R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right) \end{aligned}$$

同理 
$$\Delta_2(x, y) = \Delta_{02} + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right)$$

把上面两式代入(2-56)中, 则得到总的厚度函数

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right) \quad (2-57)$$

式中  $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$ 。

根据二项式展开, 求出公式(2-57)根号中的近似表达

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2}$$

然后把它们代入(2-57)中, 得到

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2-58)$$

把公式(2-58)代入(2-54)中, 对于透镜变换就出现了下面的傍轴近似

$$t_l(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \exp[-jk(n-1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)] \quad (2-59)$$

另外, 把薄透镜焦距公式  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$  代入上式, 得到相位变换为

$$t_l(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \exp[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)] \quad (2-60)$$

这个表达式将用作为透镜对入射扰动的影响的基本表达式。

会聚透镜的最著名的和最有用的性质之一是实现两维付里叶变换的本征能力。这种变换要比用计算机和电子学方法所实现的同样的变换要迅速得多, 省力得多, 尽管精度不太高。下面我们主要讨论用透镜实现付里叶变换的三种情况, 在这三种情况中, 照明光束均是单色相干光。图 2-10 画出 1-3 这三种情况。

### (1) 目标紧靠透镜

设具有振幅透过为  $t_0(x, y)$  的平面目标紧靠焦距为  $f$  的会聚透镜的前面, 如图 2-10(a) 所示, 假如该目标被正入射的振幅为  $A$  的单色平面波所照明, 那么入射到透镜上的光扰动为

$$U_l(x, y) = At_0(x, y) \quad (2-61)$$

透镜孔径的有限尺寸可用光瞳函数来规定

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{在透镜孔径内} \\ 0 & \text{在透镜孔径外} \end{cases}$$

这样一来, 通过透镜后的光振幅分布 (根据方程 (2-60) 可变为

$$U_l'(x, y) = U_l(x, y) p(x, y) \exp[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)] \quad (2-62)$$

式 (2-62) 中忽略了常数相位迟滞。

为了求出通过透镜后焦面的场振幅分布  $U'_f(x'_f, y'_f)$  (字母下方的脚注  $f$  表示在焦面处) 我们应用夫累涅尔 (Fresnel) 衍射公式 (文献<sup>[2]</sup>的方程 (4-10)), 并设  $z = f$ , 则有

$$U'_f(x'_f, y'_f) = \frac{\exp[j \frac{k}{2f} (x'^2_f + y'^2_f)]}{j\lambda f}$$

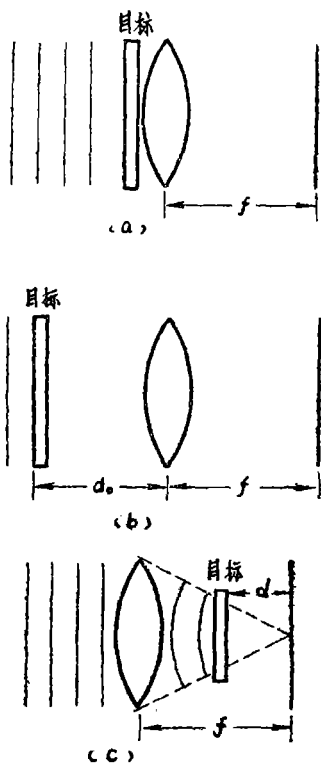


图 2-10 付里叶变换结构  
(a) 目标紧靠透镜  
(b) 目标处在透镜的前边  
(c) 目标处在透镜后边

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_i'(x, y) \exp\left[j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xx' + yy')\right] dx dy \quad (2-63)$$

再把 (2-62) 代入 (2-63) 中, 得出

$$U_i'(x'_i, y'_i) = \frac{\exp\left[j \frac{k}{2f} (x'^2 + y'^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_i(x, y) p(x, y) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xx' + yy')\right] dx dy}{j \lambda f} \quad (2-64)$$

这样一来, 场分布  $U_i'(x'_i, y'_i)$  正比于透镜孔径所对应的入射场那部分的两维付里叶变换, 当目标的物理尺寸小于透镜孔径时, 因子  $p(x, y)$  可视为 1, 这样, 公式 (2-64) 变为

$$U_i'(x'_i, y'_i) = \frac{A \exp\left[j \frac{k}{2f} (x'^2 + y'^2)\right]}{j \lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xx' + yy')\right] dx dy \quad (2-65)$$

要注意的是在目标振幅透过和焦面振幅分布之间并不是精确的付里叶变换关系, 因为有二次相位因子存在。但是由于在绝大多数情况中具有意义的是穿过焦平面的强度分布, 也就是目标的功率谱, 这样, 相位因子就无意义了。

$$I_i(x'_i, y'_i) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xx' + yy')\right] dx dy \right|^2 \quad (2-66)$$

## (2) 目标处在透镜前面

我们考虑图 (2-10(b)) 的情况, 处在透镜前面距离透镜为  $d_0$  的目标, 被正入射的平面波照明, 目标的振幅透射用  $t_0(x, y)$  表示。设  $F_0(u, v)$  表示被入射到透镜上的光的付里叶谱, 并设  $F_i(u, v)$  表示被入射到透镜上的光的付里叶谱也就是说

$$F_0(u, v) = F\{A \cdot t_0\} \quad F_i(u, v) = F\{U_i\}$$

假定夫累涅尔 (Fresnel) 近似对于在整个距离  $d_0$  上传播是有效的, 那么  $F_0$  和  $F_i$  有下面的关系 (文献 [2] 的方程 4-11)

$$F_i(u, v) = F_0(u, v) \exp\left[-j \pi \lambda d_0 (u^2 + v^2)\right] \quad (2-67)$$

在公式 (2-67) 中忽略了常数相位迟滞, 再设  $p(x, y) = 1$ , 则方程 (2-64) 可重写为

$$U_i'(x'_i, y'_i) = \frac{\exp\left[j \frac{k}{2f} (x'^2 + y'^2)\right]}{j \lambda f} F_i\left(\frac{x'_i}{\lambda f}, \frac{y'_i}{\lambda f}\right) \quad (2-68)$$

把 (2-67) 代入 (2-68) 中, 我们得到

$$U_i'(x'_i, y'_i) = \frac{\exp\left[j \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f}\right) (x'^2 + y'^2)\right]}{j \lambda f} F_0\left(\frac{x'_i}{\lambda f}, \frac{y'_i}{\lambda f}\right)$$

或者

$$U'_{f'}(x'_{f'}, y'_{f'}) = \frac{A \exp\left[j \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f}\right) (x'_{f'}{}^2 + y'_{f'}{}^2)\right]}{j \lambda f} \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{f}{f} (xx'_{f'} + yy'_{f'})\right] dx dy \quad (2-69)$$

由方程 (2-69) 可知, 当  $d_0 = f$  时, 积分号前面相位因子消失了。这样一来, 当  $d_0 = f$  时, 目标透过  $t_0(x, y)$  和后焦面上的场分布  $U'_{f'}(x'_{f'}, y'_{f'})$  有精确的付里叶变换关系。这就是常把目标放在透镜前焦面处的最主要的原因。

### (3) 目标处在透镜后

如图 2-10(c) 所示, 目标处在物井后面, 距离后焦面为  $d$ 。该目标振幅透过为  $t_0(x, y)$ 。照明情况同前, 因为入射到目标上的波是一个向后焦点会聚的球面波。

在几何光学近似中, 入射到目标上的球面波的振幅为  $Af/d$ , 目标被照明的范围由光线锥同目标平面的交线所确定。如果透井的直径为  $l$  则目标被照明的范围为  $ld/f$ 。此时光瞳函数为  $p[x(f/d), y(f/d)]$ 。

把傍轴近似应用到照明目标的球面波, 则被目标透过的场振幅可写为

$$U_0(x, y) = \left\{ \frac{Af}{d} p\left(x \frac{f}{d}, y \frac{f}{d}\right) \exp\left[-j \frac{k}{2d} (x^2 + y^2)\right] \right\} t_0(x, y) \quad (2-70)$$

假定由目标到焦平面是夫累涅尔 (Fresnel) 衍射, 可有下面的表达式 (应用文献<sup>[2]</sup> 的方程(4-10))

$$U'_{f'}(x'_{f'}, y'_{f'}) = \frac{A \exp\left[j \frac{k}{2d} (x'_{f'}{}^2 + y'_{f'}{}^2)\right]}{j \lambda f} \\ \frac{f}{d} \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) p\left(x \frac{f}{d}, y \frac{f}{d}\right) \\ \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{f}{f} (xx'_{f'} + yy'_{f'})\right] dx dy$$

公式 (2-71) 表达的结果和公式 (2-65) 在本质上是一致的。然而这种结构具有很大的灵活性, 这就是付里叶变换的比例可在实验者的控制之下。变换的空间尺寸随着  $d$  的增加而增加,  $d$  变小, 则变换的空间尺寸也变小。这种性质在空间滤频的应用中是有用的。

### 3. 光学信息处理的基本装置

根据光学透镜所具有的付里叶变换性质, 可构成所期望的数学运算的光学信息处理装置。这种装置的主要优点是速度快, 信息容量大, 结构简单, 可同时完成二维或多通道的运算, 然而, 由于它是模拟式的, 因此运算精度不太高, 但对于绝大多数应用, 这个精度已经足够了。图 2-11 是光学信息处理系统的方框图。对于相干光学处理装置, 要求光源具有好的时间相干性, 或者说频率稳定性, 一般要求频率稳定在千分之几以内。激光光源通常可满足这个要求。此外光源还具有好的空间相干性。

这意味着穿过处理器的输入面的空间域时，光学频率必须是均匀的，换言之，用时间相干性好的点光源就可以满足这个要求。

如图 2—11 所示，输入转换器在时间上和空间上调制照明光束。目前，摄影胶片和超声延迟线是用作为输入转换器的典型介质。处理器的光学系统，滤频片和输入转换器组合在一起完成所期望的数学运算。最后输出转换器把光学信号转换成所期望的形式，以便进行探测。通常，相干光学信息处理装置可完成频谱分析，光学滤频，相关运算等运算。

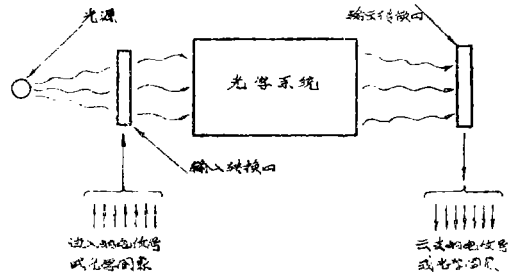


图 2—11 典型的相干光学信息处理系统的方案图

### (1) 频谱分析装置

**二维频谱分析装置** 图 2—12 是二维频谱分析的光学结构。经过准直扩展后的平行光速照明输入透明片（它放在透镜的前焦面处），设透明片的振幅透过函数为  $f(x, y)$ ，根据透镜的付里叶变换性质，在透镜的后焦面中就会出现  $f(x, y)$  的频谱，它们之间的数学关系为：

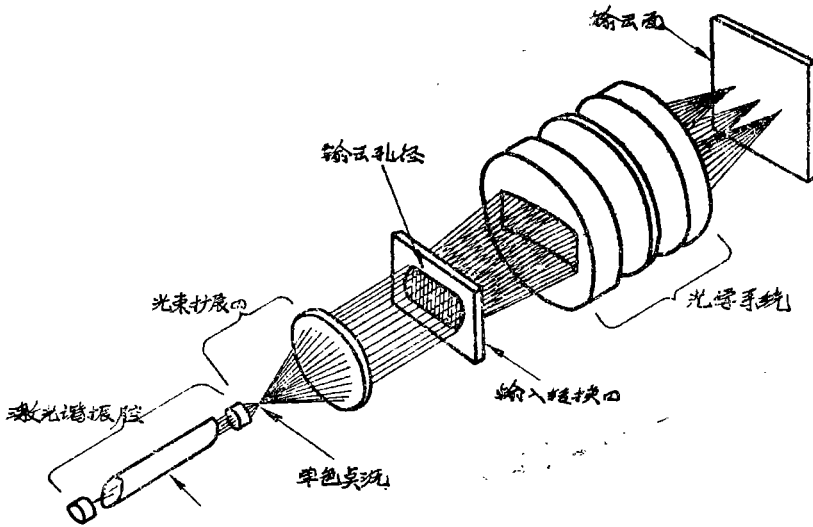


图 2—12 用于二维频谱分析的光学结构

$$F(u, v) = c \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-2\pi j(ux + vy)] dx dy \quad (2-72)$$

式中  $c$  为一常数。

我们举一个例子，设输入函数为  $f(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos \omega_0(x + x_0)]$ ，式中方括号内加一个常数是为了避免出现负值（因为胶片不能记录负值）。它的付里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [1 + \cos \omega_0(x + x_0)] \exp[-j\omega x] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\exp[j\omega_0(x + x_0)]}{2} + \frac{\exp[-j\omega_0(x + x_0)]}{2} \right] \exp(-j\omega x) dx \end{aligned}$$

式中,  $w_1, w_0$  为圆频率。如果输入透明片的口径为  $2a$ , 则

$$\begin{aligned}
 F(w) &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \exp[-jwx] A dx + \frac{1}{4} \int_{-a}^a \exp[jw_0(x+x_0) - jwx] dx \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{-a}^a \exp[-jw_0(x+x_0) - jwx] dx \\
 &= \frac{-e^{-jaw} + e^{jaw}}{2jw} + \frac{e^{jw_0x_0}}{4} \left[ \frac{e^{ja(w_0-w)} - e^{-ja(w_0-w)}}{j(w_0-w)} \right] \\
 &\quad + \frac{e^{-jw_0x_0}}{4} \left[ \frac{-e^{-ja(w_0+w)} + e^{ja(w_0+w)}}{j(w_0+w)} \right]
 \end{aligned}$$

根据尤拉公式  $\operatorname{sjn} \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ , 上式可变为

$$\begin{aligned}
 F(w) &= a \left[ \frac{\operatorname{sin} aw}{aw} \right] + \frac{a \exp[jw_0x_0]}{2} \left[ \frac{\operatorname{sin} a(w_0-w)}{a(w_0-w)} \right] \\
 &\quad + \frac{a \exp[-jw_0x_0]}{2} \left[ \frac{\operatorname{sin} a(w_0+w)}{a(w_0+w)} \right]
 \end{aligned}$$

图 2-13 就是  $F(w)$  的功率谱  $F(w)F^*(w)$  的照相, 由图可见, 正弦式函数由三个谱组成, 每个谱周围的波瓣是由输入数据的有限孔径所造成的。事实上, 这种波瓣结构是输入孔径的付里叶变换同无限大的一维正弦波的付里叶变换的卷积结果。

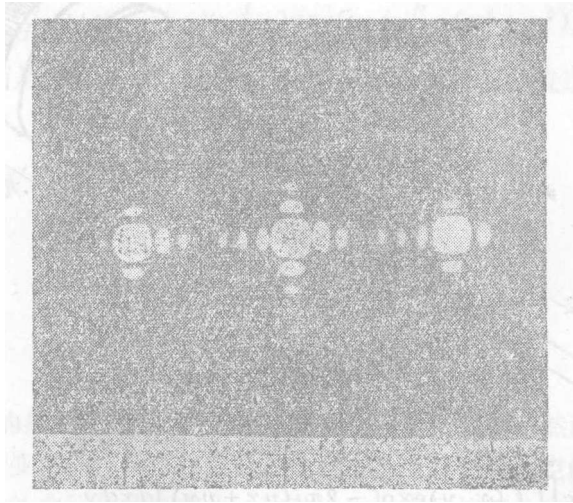


图 2-13

**一维多通道频谱分析装置** 图 2-14 是完成多通道谱分析的光学结构, 描述此装置的性能的数学方程为

$$F(w_x, y_i) = c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_i) \exp[-jw_x x] dx \quad (2-73)$$

式中  $N = 1, 2, \dots, N$ 。在这里, 输入转换器引进  $N$  个一维信号  $f(x, y_i)$ 。由于在装置中加入一组柱面镜, 它使  $y_i$  方向进行二次付里叶变换, 因此在输出面中显示出原目标的像, 而在  $x$  方向中, 由于柱面并不起聚焦作用, 因此在输出面中显示付里叶频谱。这样就实现了多

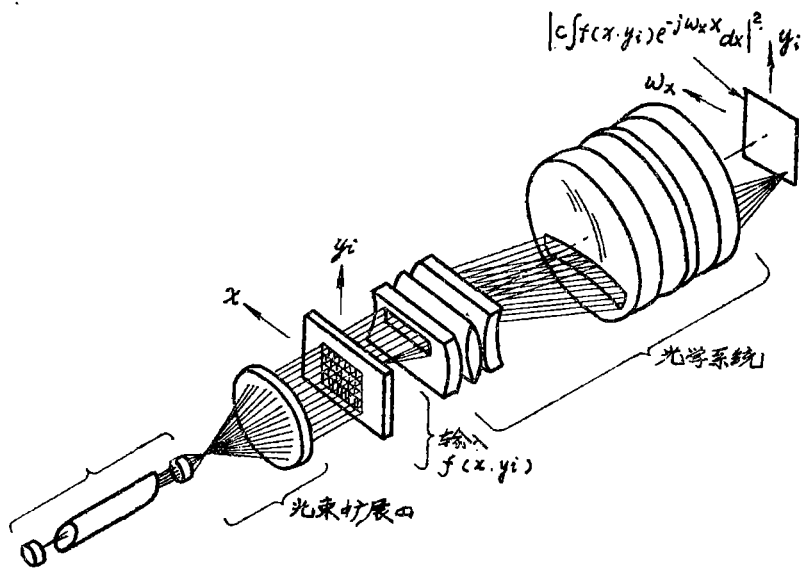


图2-14 一维多通道频谱分析器

通道运算。为了使一个通道的谱不影响另一个通道的谱，在相邻通道之间必须有空间保护带，这个保护带的宽度应这样来定：使之能防止被一个通道产生的边带波瓣同邻通道相干涉。如果这个要求过于苛刻，那么就要加所谓的 apodization 以遏止  $y$  方向中的边波瓣的出现<sup>[5]</sup>。

由于不同的目标具有不同的频谱特性。因此可用这种技术来辨认目标<sup>[6]</sup>。

## (2) 光学滤频装置

**二维光学滤频** 图2-15是光学信息处理的基本装置，用它可以完成诸如像质改善，信号探测之类的运算，我们可以把这个装置看作为二个频谱分析器的串联组合。

如果输入透明片 ( $p_1$ 面) 是一个待恢复的模糊照片，它的振幅透过正比于  $g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y)$ ，那么在此装置的频谱面 ( $p_2$ ) 中就会出现它的付里叶谱， $G(u, v) = F(u, v)$

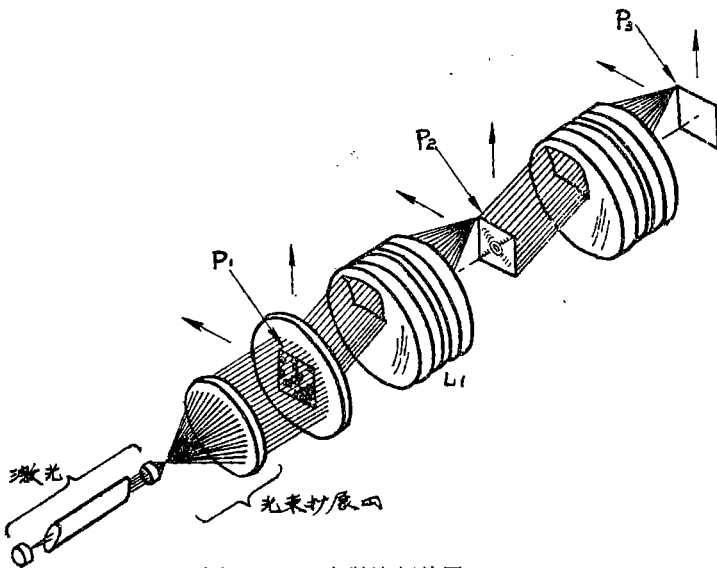


图2-15 光学滤频装置

$H(u, v)$ 。假如我们在  $p_2$  面中放一个滤频片 (其函数为  $T(u, v)$ ) 来修改像的频谱, 而后再经过一次付里叶变换, 就会在输出面  $p_3$  中出现被修改了的像 (当然像被颠倒了)。如果我们制作这样的滤频片  $T(u, v)$ , 使它满足  $T(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}$ 。这样一来通过滤频后的频谱就是原目标  $f(x, y)$  的频谱了。再经过一次付里叶的变换之后就恢复了原目标的形象。实现了从模糊的照片中抽取清晰像的目的。这就是相干光学信息处理用于改善像质的基本原理。

如果需要用这个装置来探测存在于噪音中的信号  $S(x, y)$ , 此时输入透明片的函数为  $f(x, y) = s(x, y) + n(x, y)$ , 式中  $n(x, y)$  是噪音背景。为了从噪音中检出这个信号  $s(x, y)$ , 就要在频谱面中加一个匹配滤频片, 该滤频片函数为<sup>[7]</sup>。

$$P(u, v) = \frac{S^*(u, v)}{|N(u, v)|^2} \quad (2-74)$$

式中  $S^*(u, v)$  是  $s(x, y)$  的付里叶变换的复数共轭,  $N(u, v)$  是  $n(x, y)$  的付里叶变换。如果  $n(x, y)$  是白的高斯噪音, 则  $N(u, v)$  为常数, 因此

$$p(u, v) = C_0 S^*(u, v) \quad (2-75)$$

如果我们把用公式(2-75)表示的滤频片放在图2-15的  $p_2$  面中, 则有

$$F(u, v) = C_0 S(u, v) S^*(uv) \quad (2-76)$$

最后再用透镜  $L_2$  对(2-76)作逆付里叶变换

$$\begin{aligned} f_2(x, y_2) &= C_0 \iint S(u, v) S^*(u, v) \exp[2\pi j(ux_2 + vy_2)] du dv \\ &= C_0 \iint s(x, y) s(x_2 + x, y_2 + y) dx dy \end{aligned} \quad (2-77)$$

公式(2-77)就是输入信号  $s(x, y)$  的自相关函数。这样的滤频叫做匹配滤频。

当噪音不是白的高斯噪音时, 输入函数变为  $s(x, y) + n(x, y)$ 。把公式(2-75)所表示的滤频片放入  $p_2$  面中, 则有

$$F(u, v) = C_0 [S(u, v) S^*(u, v) + N(u, v) S^*(u, v)]$$

再经过一次付里叶变换之后, 在输出面  $p_3$  中会出现下面的函数

$$\begin{aligned} f_2(x_2, y_2) &= C_0 \iint s(x, y) s(x_2 + x, y_2 + y) dx dy \\ &+ C_0 \iint s(x, y) n(x_2 + x, y_2 + y) dx dy \end{aligned} \quad (2-78)$$

公式(2-78)的第一项是信号  $s(x, y)$  的自相关函数, 它会有峰值出现, 而第二项是信号和噪音的相关函数, 由于噪音是紊乱的, 不会出现锐利的峰值。由此实现了信号的探测。

一 维多通道匹配滤频。图2-16表示能完成一维多通道匹配滤频的光学装置。输入转换器记录了多通道的一维信号  $s(x, y_i)$ 。在图2-16的  $x$  方向中, 由于柱面镜  $C_1$  没有光焦度, 因此在  $p_2$  面中完成了付里叶变换; 而在  $y$  方向中, 由于柱面镜  $C_1$  和透镜  $L_1$  的组合作用, 使各个通道的像成在  $p_2$  面中。这样一来, 如果在  $p_2$  面中放置一组一维匹配滤频片  $p_i(u)$ , 则在输出面  $p_3$  中, 就会得出下式给出的光振幅分布

$$f_2(x, y_i) = \int S(u) p_i(u) \exp[2\pi j u x_2] du = \int S(x) p_i(x_2 + x) dx \quad (2-79)$$

式中所谓“参考函数”  $p_i(x)$  是  $p_i^*(u)$  的逆付里叶变换, 并且  $i = 1, 2, \dots, N$ 。  $N$  可以达到透镜系统的空间带宽乘积那样大的值 (空间带宽等于能够计算的最大周数同输入孔径尺

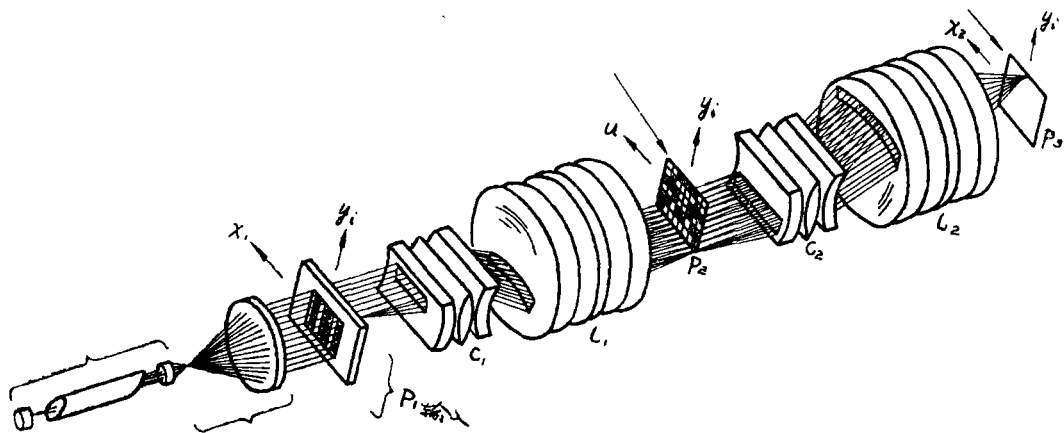


图 2—16 多通道匹配滤频装置

寸之乘积)。这样一来，图 2—16所示的多通道匹配滤频系统可以使一个输入信号同时和具有 10,000 到 100,000 个参考频谱的多容量滤频片相比较。这种瞬时的、并行的处理机能为所有电子学系统所不及。这充分地说明了光学信息处理技术的巨大潜力。

### (3) 光学相关器

图 2—17是光学相关器的典型结构。目标函数  $f_1(x)$  放在透镜 2 的前焦面中，它被振幅为  $A$  的准直光束照明，这样在透镜 2 的后焦面中出现了目标函数的付里叶变换。透镜 3 的前焦面和透镜 2 的后焦面重合，在透镜 3 的后焦面处（参考面）出现了目标谱的逆付里叶变换，即原目标的像。我们在参考平面中放置第二个透过函数  $f_2(x)$ ，则通过参考面后的光振幅透过为

$$Af_1(x)f_2(x)$$

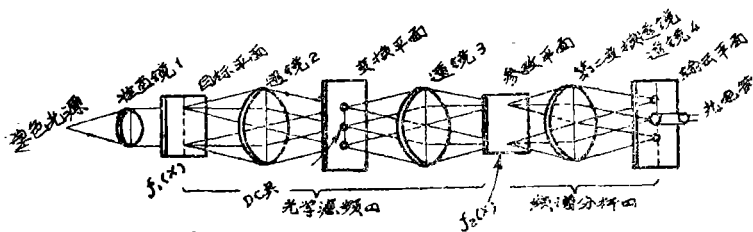


图 2—17 光学相关器

我们这样来放置透镜 4，使它的前焦面和参考面重合，因而在透镜 4 的后焦面（输出平面）出现函数  $Af_1(x)f_2(x)$  的付里叶变换

$$F\{Af_1(x)f_2(x)\} = \int f_1(x)f_2(x)\exp[-2\pi jux]dx$$

上式中，如果我们取另频率项 ( $u = 0$ )，舍去其余项，则上式变为

$$\phi_{21}(vt) = A \int f_2(x) f_1(x+vt) dx \quad (2-80)$$

式中  $v$  在这里是速率。公式 (2-80) 就是相关运算表达式。用图 2-17 所示的装置可实现这一运算，这只需要在最后输出中取另级谱就可以了。可用光电管探测输出信号，也可用胶片记录这个信号。

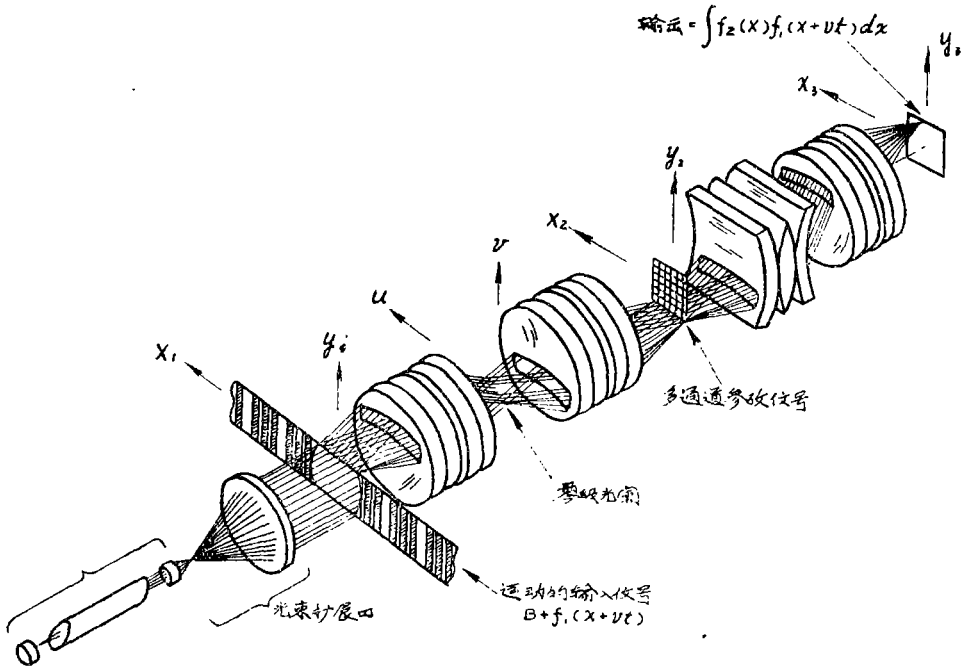


图 2-17 多通道光学相关器

通常使输入透明片运动来实现函数  $f_1(x+vt)$ ，但因胶片不能记录负值，要加一常数项  $B$  使  $B + f_1(x+vt) \geq 0$ ，然而在相关探测中，这个常数项又是不希望的。这样就需要在变换平面中加一个另级光阑，拦掉另级谱 ( $D, C$  项)，以消除这个常数项  $B$  对输出的影响。

在相关运算中，常常使用多通道相关器，如图 2-18 所示，用它可同时探测多路信号，这在雷达和声纳中有广泛的应用。

### III 摄影胶片

摄影胶片已经是并且还将继续是光学处理系统和滤频系统的基本元件。在滤频系统中它可起三个主要作用：第一，它可用作为记录输入数据的介质，从而把输入数据送到滤频系统中去；第二，它可用作为纪录滤频片函数的介质；第三，它可用作为记录滤频系统输出整据的介质。尽管目前也在使用其他品种记录介质，并且有的介质大有发展前途，但是在目前和在可预期的将来，摄影胶片仍然是光学信息处理的主要记录介质之一。

#### 1. 曝光的物理过程

未曝光的摄影胶片或底板，一般地由悬浮在明胶支承中的大量的细密的银的卤化物颗粒所组成，它们附着在坚固的基底上。对胶片来说，基底就是片基，它通常由醋酸盐或涤纶做成，

对底板而言，就是玻璃。当这种对光敏感的材料被曝光时，银的卤化物颗粒吸收光能并进行复杂的物理变化。我们发现，吸收了足够能量的这些颗粒含有金属银的细微斑点，这些斑点称之为显影中心。然后，被曝光的胶片经受称之为显影的化学处理。在显影过程中，单个的显影中心的存在就能促进一个整个的银的卤化物颗粒变成金属银，不包含显影中心的那些颗粒并不遭受这样的变化。最后使胶片经过定影的化学过程。这个过程把剩下的银的卤化物颗粒移走，而留下金属银。这样就防止以后银的卤化物再次变成金属银，以便长期保存。当然，银的颗粒在光学频率内是不透明的，被显影的胶片或底板的不透明度将取决于每个透明区域中的银颗粒的密度。

## 2. 若干术语的定义

胶片或底板所遭受的曝光  $E$  被定义为：入射到感光表面上每一点处的单位面积上的能量。如果入射的光强度用  $J$  表示，且曝光时间为  $t$  秒，我们有

$$E = Jt$$

被显影后的透明片的强度透过  $T(x, y)$  被定义为

$$T(x, y) = \text{局部平均} \begin{cases} I_T \text{ [在 } (x, y) \text{ 处的透过]} \\ I_0 \text{ [在 } (x, y) \text{ 处的入射]} \end{cases}$$

式中，局部平均是这样的一个面积，它同胶片颗粒相比是大的，而同透过强度有明显变化的面积相比要小。

很早以前，F. Hurter 和 V. C. Driffield 就证明： $\log(\frac{1}{T})$  正比于被显影了的透明片的每单位面积上的银质量。因此，他们把摄影密度  $D$  定义为

$$D = \log\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2-81)$$

摄影密度对曝光的对数图是对摄影底片的感光性能的最普遍应用的描述，通常称为 Hurter—Driffield 曲线（简称为 H—D 曲线）。图 2—19 表明摄影负片的典型的 H—D 曲线。当曝光在特定程度之下时，密度  $D$  与曝光量  $E$  无关，并且等于称之为浓雾的最小值。在曲线的脚趾处，密度开始随曝光的增加而增加。在曲线中有这样的区域存在，在此区域中，密度同对数曝光成正比，H—D 曲线的直线部分的斜率称之为胶片的伽玛 ( $\gamma$ ) 值。最后，曲线在称之为肩 P 部的区域中饱和了，在此处，尽管曝光量增加了，密度值也不再变化了。

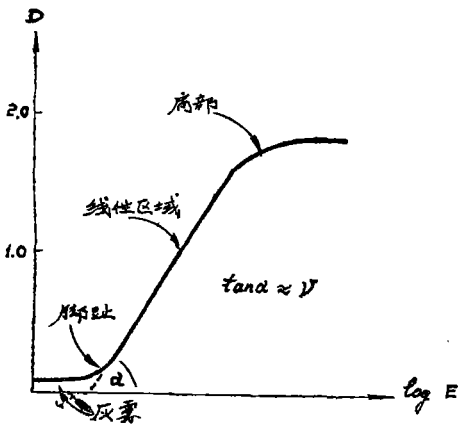


图 2—19 H—D 曲线

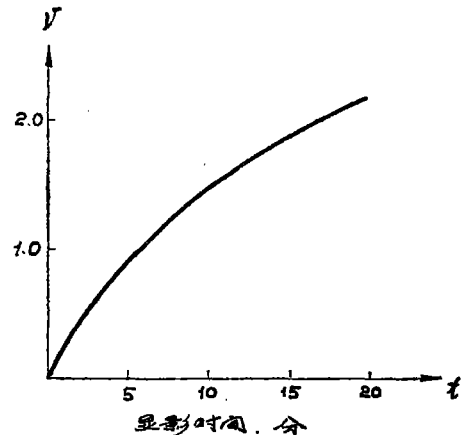


图 2—20 胶片的  $\gamma$  值同显影时间的关系

$H-D$ 曲线的线性区域是普通摄影所使用的部分。具有大的 $\gamma$ 值的底片称之为高对比底片。具有小的 $\gamma$ 值的底片称之为低对比底片。实际的 $\gamma$ 值主要受下面三种因素影响：(1) 胶片中的乳胶形式；(2) 所使用的显影液；(3) 显影时间。图 2-20 表明 $\gamma$ 值与显影时间的关系。通过合适的选择胶片，显影液和显影时间，可获得预期的 $\gamma$ 值，且带有足够的精度。

### 3. 非相干光学系统中的胶片

在胶片的许多应用中，可以把它看作为这样的一种元件，它把曝光期间的入射强度分布 $J$ 转换成显影后的透过强度分布 $I_T$ 。当胶片用作为非相干光学系统中的元件时，这种观点就更合适了。我们现在就讨论这种转换的性质。

假定胶片在 $H-D$ 曲线的线性区域内被使用，密度 $D$ 可以写为

$$D = \gamma_n \log E - D_0 = \gamma_n \log(Jt) - D_0 \quad (2-82)$$

式中 $\gamma_n$ 为伽玛值， $D_0$ 是这样的值，即如果没有脚趾存在的话， $H-D$ 曲线的线性部分向下延长和轴交点的 $D$ 值。脚注 $n$ 表示负片。把公式(2-81)代入(2-82)中得出

$$\log(T_n) = -\gamma_n \log(Tt) + D_0$$

或者等价地

$$T_n = 10^{D_0} (Tt)^{-\gamma_n}$$

最后 
$$T_n = K_n T^{-\gamma_n}$$

式中 $K_n$ 是一个正的常数。值得注意的是，被这种关系所规定的强度转换对胶片的任何正的 $\gamma$ 值都是高度非线性的。

在显影后的强度透过和曝光期间入射的强度之间还可求得正的幂次定律关系，尽管这样做一般需要两步摄影过程。在第一步中用通常的方式作负的透明片。在第二步中，负的透明片所透过的光被用来使第二个胶片曝光，其结果就构成了最后的正透明片。设第一个透明片的透过为

$$T_{n1} = K_{n1} T^{-\gamma_{n1}}$$

如果使这个透明片同第二个未曝光的胶片接触放置，并且用强度 $I_0$ 来照明它们，那么用到第二个胶片的强度是 $T_{n1} I_0$ 。而最后的强度透过变为

$$T_p = K_{n2} (I_0 T_{n1})^{-\gamma_{n2}} = K_{n2} I_0^{-\gamma_{n2}} T^{\gamma_{n1} \gamma_{n2}} K_{n1}^{-\gamma_{n2}}$$

或者等价地

$$T_p = K_p T^{\gamma_p}$$

式中  $K_p = K_{n2} I_0^{-\gamma_{n2}} K_{n1}^{-\gamma_{n2}}$ ，为一正的常数， $\gamma_p = \gamma_{n1} \gamma_{n2}$  是两步过程的总伽玛值。很明显，当而且仅当总的 $\gamma$ 值为1时，正的透明片的强度透过才和入射的强度线性成关系。

### 4. 相干光学系统中的胶片

当胶片用作为相干光学系统的元件时，它应该提供下面的作用：(1) 把曝光期间入射的强度转换为显影后被透过的复数振幅，(2) 把曝光期间入射的复数振幅转换为显影后透过的复数振幅。当然，仅当用相干光来曝光胶片时，第二个作用才有意义。

在相干系统中，由于被胶片透过的光的复数振幅是一个重要的量。因此，用它的复数振

幅透过  $\tau$  来描述透明片是必要的。把  $\tau$  简单的定义为强度透过  $T$  的正的平方根是很吸引人的，然而，这样的定义忽视了相对的相位位移。当光通过胶片时，就会引起相位位移。这个相位位移通常由胶片的厚度变化引起的。引起胶片厚度变化的原因有二，其一，胶片基底的厚度变化，也就是说，基底不是光学平板；其二，被显影后的透明片，因银的密度变化而使乳胶厚度变化。后者的变化是决定性的，并且强烈地取决于胶片的曝光。这样一来，胶片的振幅透过必须写成下面较为完善的形式

$$\tau(x, y) = +\sqrt{T(y, x)} \cdot \exp[j\phi(x, y)] \quad (2-85)$$

式中  $\phi(x, y)$  是透明片引进的相位位移。

在绝大多数应用中，胶片厚度的变化是特别不希望的，因为他们不容易控制。采用称之为液体门的装置可以消除相位变化的影响，如图 2-21 所示。在 a 图中，由于光学平板只有外面是光学平面，匹配油的折射率必须介于玻璃和乳胶折射率之间，因为二者不一定相等。而在 b 图中由于光学平板两面都是光学平面，浸油的折射率只需和乳胶的折射率相等就可以了。从补偿相位移效果看，当然后一种装置好些，只是加工时费些力。有了液门体之后，胶片的振幅透过可以写为

$$\tau(x, y) = +\sqrt{T(x, y)} \quad (2-86)$$

这样一来，方程 (2-86) 同方程 (2-82), (2-83) 组合之后，就得到振幅透过表达式

$$\text{负透明片: } \tau_n = k_n T^{-\gamma_n/2} = k_n |U|^{-\gamma_n} \quad (2-87)$$

$$\text{正透明片: } \tau_p = k_p T^{-\gamma_p/2} = k_p |U|^{\gamma_p} \quad (2-87)$$

式中  $U$  是曝光期间入射的场的复数振幅，且

$$k_n = K_n^{1/2}, \quad k_p = K_p^{1/2}.$$

正如我们在以后要讨论的许多例子中所看到的，我们希望使胶片起复数振幅的平方定律

转换作用。这种性能可用若干种方法来获得。其一是制作一个带有总伽玛值为 2 的正透明片，如方程 (2-87) 所见。为了获得曝光的最大动态范围，两步过程的第一个伽玛值常选为小于 1 (例如  $\gamma_{n2} = 1/2$ )。而第二个伽玛值选为大于 1 (例如  $\gamma_{n2} = 4$ ) 这样，它们的乘积等于 2。

然而，用任意伽玛值的透明片 ( $\gamma$  可以为正，也可为负) 可以在有限的动态范围上获得平方定律的作用，用振幅透过对曝光的图来代替传统的  $H-D$  曲线就很容易看到这一点。这种描述首先为麦尔夏 (Marechal) 所倡导<sup>[8]</sup>，并为柯兹玛 (Kozma) 成功地应用于摄影的非线性效果的分析中<sup>[9]</sup>。图 2-22 表明了负透明

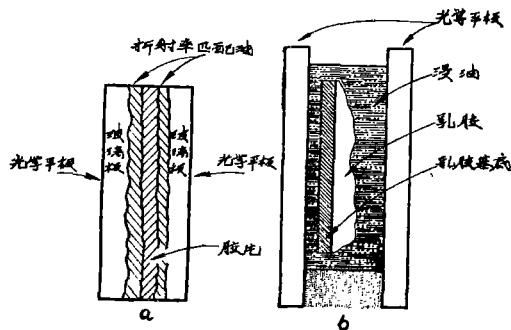


图 2-21 用于消除胶片所附加的相位移的液体门

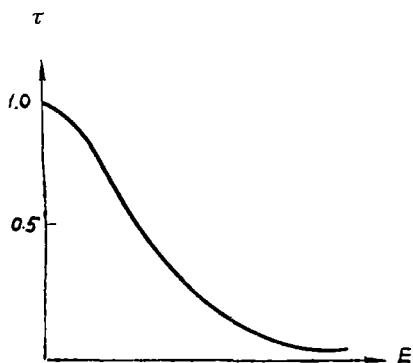


图 2-22 振幅透过对曝光的典型曲线 (对负透明片而言)

片的振幅透过对曝光的图 ( $\tau-E$  曲线) 如果胶片被偏置到某一工作点, 该点处在  $\tau-E$  曲线的最好线性范围内, 那么在整个特定的动态范围上, 该胶片将提供振幅的增量变化的平方定律转换。这样一来, 如果  $E_b$  表示偏值曝光, 并且  $t_b$  是相应的偏值透过, 那么我们可在它的线性区域内用下式表示  $\tau-E$  曲线

$$\tau_h \cong t_b + \beta(E - E_b) = t_b + \beta' |\Delta U|^2 \quad (2-88)$$

式中  $\beta$  是偏值点处的曲线斜率,  $\Delta U$  表示增量振幅变化, 而  $\beta'$  是  $\beta$  和曝光时间的乘积。要注意, 对于负透明片,  $\beta$  和  $\beta'$  是负值。值得指出的是: 获得最佳动态范围的偏置通常处在对应的  $H-D$  曲线的脚趾附近。

## IV 全息照相简述

自从1948年英国的D. 伽柏(Gabor)为了提高电子显微镜的分辨本领而发明全息照相以来<sup>[10]</sup>, 至今不到三十年, 而且由于那时还没有很好的相干光源, 中间又几乎搁置了十余年, 直到60年代, 由于激光的出现和发展, 才使全息照相迅速发展起来。现在, 全息照相作为一门具有无限生命力和广阔前途的新技术已经并且将继续应用到科学技术的各个领域中去。国外对此作了大量工作。

光学信息处理技术和全息照相密切相关, 光学信息处理的发展是全息照应用的一个重要方面, 全息照相为光学信息处理解决很多关键技术问题, 用全息照相方法制作复数滤频片就是其中之一。因此, 掌握全息照相技术的基本原理对于从事光学信息处理的人们来说是必不可少的。

### 1. 基本原理

和只能记录物体的光强分布(即振幅的平方)的普通照相不同, 全息照相可以同时记录物体光波的振幅和相位, 也就是说, 全息照相能把描述光波波前的全部信息记录下来。这个名称的由来也在于此。普通照相记录下来的是用光学方法形成的物体的像, 因此, 要想观察物体的像, 只要直接观察照片就可以了。而全息照相则不同, 因为它记录的是物体光波本身, 因此我们观察全息照相时, 看到的只是各种干涉图样, 而根本不会直接看到物体的像。

全息照相基于光的干涉原理, 它的特点是两步过程, 第一步是物体光波(包括振幅和相位)的记录, 即构成全息图; 第二步是原物体光波的重现, 只有这时才能看到原来的物体。

如图 2-23 所示, 设由物体来的光波为  $O(x, y) = O(x, y)\exp[-j\psi(x, y)]$ , 与目标波相干的参考光波为  $R(x, y) = R(x, y)\exp[j\psi(x, y)]$ , 二者相遇产生干涉图形, 而后被记录在摄影胶片上, 其组合强度为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |R(x, y) + O(x, y)|^2 \\ &= |R(x, y)|^2 + |O(x, y)|^2 \\ &\quad + R^*(x, y)O(x, y) \end{aligned}$$

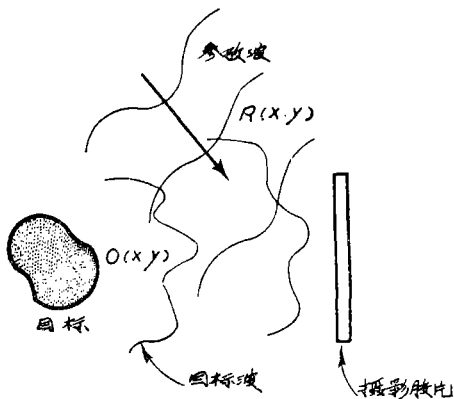


图 2-23 全息图的记录

$$+ R(x, y) O^*(x, y) = |R(x, y)|^2 + |O(x, y)|^2 + 2R(x, y) \quad (2-89)$$

$$O(x, y) \cos[\psi(x, y) - \phi(x, y)]$$

由公式(2-88)知道,被显影后的振幅透过可以满足下式

$$\begin{aligned} \tau_f(x, y) &= t_b + \beta' O(x, y) \\ &= t_b + \beta' \{|R|^2 + |O|^2 + R^*O + RO^*\} \end{aligned}$$

当参考波的强度  $|R|^2$  通过记录表面是均匀的时,上式可变为

$$\tau_f(x, y) = t_b + \beta' (|O|^2 + R^*O + RO^*) \quad (2-90)$$

由公式(2-90)可知,括号中的第二项包含物体光波的全部信息  $O(x, y) = O(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]$ 。这样一来,就完成了全息图的制备。下一步是物体光波的重现

设被显影后的称之为全息图的透明片用相干的重现参考光波  $B(x, y)$  来照射,则被透明片透过的光为

$$\begin{aligned} B(x, y) \tau_f(x, y) &= t_b B + \beta' O O^* B \\ &+ \beta' R^* B O + \beta' R B O^* = U_1 + U_2 + \\ &U_3 + U_4 \end{aligned} \quad (2-91)$$

如果重现参考波和原参考波相同,即  $B = R$ ,那么,上式的第三项变为

$$U_3(x, y) = \beta' |R|^2 O(x, y)$$

由前知,  $|R|^2$  是均匀的,这样一来,上式中除了一个常数之外,是原目标波前  $O(x, y)$  的精确重现。如图 2-24 a 所示。另外,如果  $B$  选作为原参考波的复数共轭,即  $B = R^*(x, y)$ ,那么(2-91)的第四项变为

$$U_4(x, y) = \beta' |R|^2 O^*(x, y)$$

这样就使原目标的波前的复数共轭被重现了。

## 2. 介绍几种全息图

存在若干种记录和重现波前的形式,而且均各自具有特点,适用不同的要求,下面仅简要的介绍几种,特别是在光学信息处理中常常应用的几种。

### (1) 伽柏 (Gabor) 全息图——共轴型

最早为伽柏 (Gabor) 所制作的全息图如图 2-25 a 所示<sup>[10]</sup>。这样记录的全息图的振幅透过如公式(2-90)所示。当用原参考波作为重现波来照射这个全息图时(如图 2-25 b 所示),公式(2-91)变为

$$\begin{aligned} R \tau_f &= R t_b + \beta' R |O(x, y)|^2 + \beta' |R|^2 O(x, y) \\ &+ \beta' R R O^*(x, y) \end{aligned} \quad (2-92)$$

由于参考波和重现波均是平面波,因此第一项也是平面波,它直接通过透明片,而对于第二项,由于  $|O(x, y)| \ll R$  (这是伽柏全息图的先决条件),因此此项基本上也可看作是均匀的。第三项是和  $O(x, y)$  成正比的场分布,这一项构成了原目标的实像(如图 2-25 b

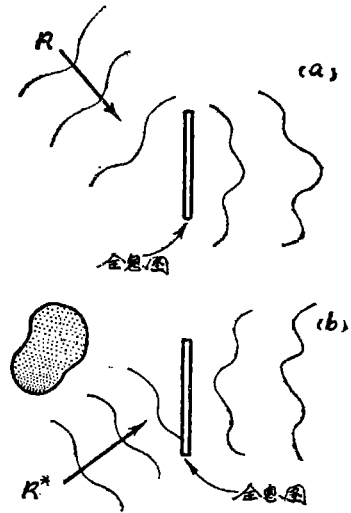


图 2-24 波前重现

- (a) 用原参考波  $R$  照明全息图  
(b) 用共轭参考波  $R^*$  照明全息图

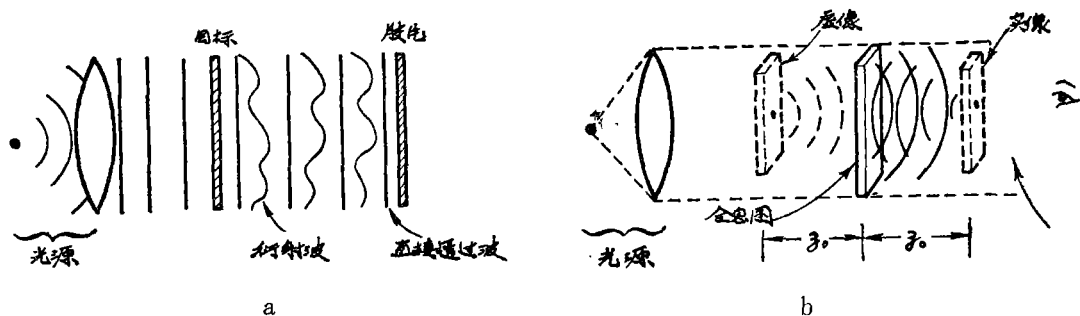


图 2—25 伽柏全息图

所示)。当重现波为参考波的复数共轭时，除了虚像和实像互易外，没有什么其它的区别。这种全息图有二个缺点：a) 由于目标阻拦了绝大部分光，因此很难使胶片恰当地曝光（目标的衍射波同直接光束相比是相当弱的）；实像和虚像成在一条直线上，因此，当要观察其中之一时，另一个也在背景中扰动。基于上述理由，目前已很少采用这种全息图。

## (2) 雷兹——乌帕特尼克斯(Leith—Upatnieks)

这种广泛应用的全息图的形式为美国密执安大学雷达实验室的雷兹 (Leith) 和乌帕特尼克斯 (Upatnieks) 于1962年在没有使用激光光源的情况下做出的<sup>[11]</sup>。这种全息图的出现，可以说是全息照相的一次改革，它克服了伽柏全息图的致命缺点，使之实用化。图 2—26a 为这种全息图的记录装置，此时参考波为  $R(x, y) = R \exp[-2\pi j a y]$ ，其中  $a = \frac{\sin \theta}{\lambda}$ ， $R$  为常数，这样一来，通过胶片的强度分布为

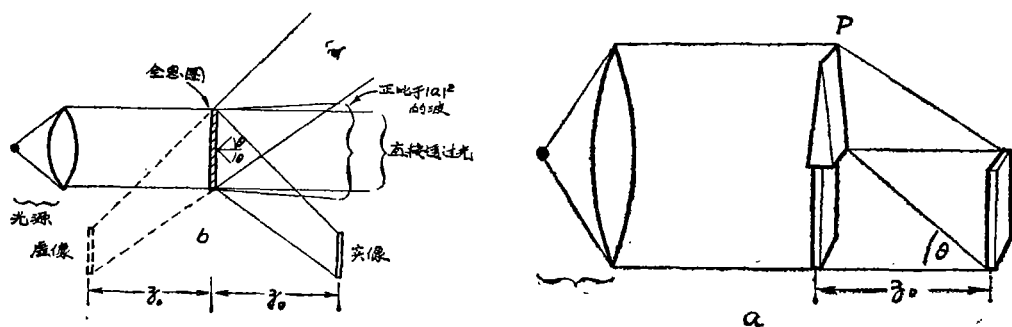


图 2—26 莱兹——乌帕特尼克斯全息图

$$I(x, y) = |R|^2 + |O(x, y)|^2 + RO \exp(j2\pi a y) + RO^* \exp(-j2\pi a y) \quad (2-93)$$

把胶片显影后，产生与曝光成比例的振幅透过为

$$\tau_r(x, y) = t_0 + \beta' |O(x, y)|^2 + \beta' RO(x, y) \exp[j2\pi a y] + \beta' RO^*(x, y) \exp(-j2\pi a y) \quad (2-94)$$

如果我们用垂直入射的平面波  $B$  来照射这个全息图时，如图 2—26 b 所示，这时就会得到下面四项，

$$U_1 = t_b B,$$

$$U_2 = \beta' B |O(x, y)|^2,$$

$$U_3 = \beta' B R O(x, y) \exp(j2\pi\alpha y)$$

$$U_4 = \beta' B R O^*(x, y) \exp[-j2\pi\alpha y]$$

第一项 $U_1$ 直接透过胶片，第二项 $U_2$ 是略微衍射的光来，但也基本上直接透过胶片，第三项正比于原目标波前 $O(x, y)$ 乘以一个线性指数因子（上面式中 $B$ 是常数）。这就是说，在离开透明片为 $z_0$ 的地方产生目标的虚像；第四项正比于共轭波前 $O^*(x, y)$ 乘以一个线性相位因子，它在透明片的另一方的 $z_0$ 处出现目标的实像。这两个像是离轴的，离轴的程度取决 $\alpha$ 角，

### (3) 普通的不透明目标的全息图

大多数目标是不透明的，这时可用图 2—27 所示的装置制作全息图，在这种全息图中，目标上的每一点都将以不同的方式反射光，这些反射光同参考光束产生的干涉图样被记录在摄影胶片上，而后用与原参考波相似的重现光来照射这个被显影后的全息图，就会出现原目标的三维像。由于由目标上每一点反射的光被散开在底片的各个地方，因此在底片上的每一局部地方几乎都包含整个目标的信息。这样一来，如果全息图的某一部分损坏了，那么也不会破坏整个目标的重现，只是分辨率有些降低罢了。这是全息照相保存信息的无可伦比的优点。

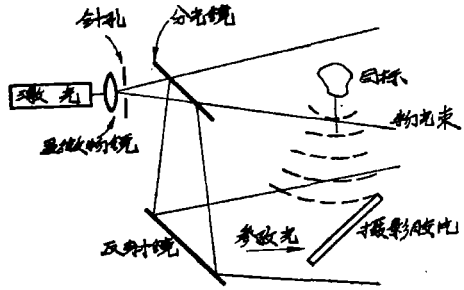


图 2—27 漫射目标全息图

### (4) 付里叶变换全息图

这种全息图广泛地应用了光学信息处理中，大多数复数滤波片其实质就是付里叶变换全息图。图 2—28 说明这种全息图的记录和重现的方法。在图 2—28 a 中，目标和作为点源的孔均处在透镜的前焦平面上，当用准直相干光照明目标和孔时，则在透镜 $L_1$ 的后焦面中会显示出目标和点源的付里叶变换，二者的干涉图样被记录在处于后焦面中的摄影胶片上，这就构成了付里叶变换全息图。图 2—28 b 是这种全息图的重现装置，全息图被放置在透镜 $L_2$ 的前焦面中，用准直相干光照射这个全息图，就会出现原目标的付里叶频谱，而后再通过透镜 $L_2$ 作逆付里叶变换，在透镜 $L_2$ 的后焦面上就出现了原目标的像。根据透镜 $L_1$ 和 $L_2$ 的焦距的比例可以使重现的像放大或缩小。

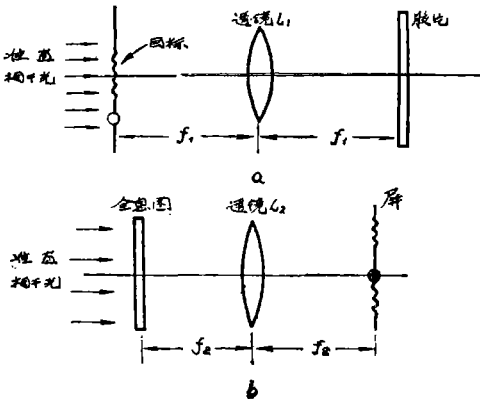


图 2—28 付里叶变换全息图

(a) 记录 (b) 重现

## (5) 无透镜式付里叶变换全息图

上面四种全息图的前三种通常称为夫累涅尔 (Fresnel) 全息图。一般地, 夫累涅尔全息图对胶片分辨率要求相当高, 而付里叶变换全息图就不然了, 由于它记录的是目标的频谱的干涉图样, 因此对胶片分辨率的要求就不高了, 这是付里叶变换全息图的一大优点。

记录夫累涅尔全息图时, 所用的物体光波和参考光波的曲率和方向是不相同的, 也就是说, 目标是球面波, 而参考波可以是平面波或者各种曲率的球面波(不同于目标波的曲率)。而付里叶变换全息图的形成就不一样了。例如在图 2-28 中的付里叶变换全息图, 目标波和参考波在记录时均是平面波, 就是说二者的曲率相同, 方向也相同, 这是制作付里叶变换全息图的基本条件, 根据这个条件, 即目标波和参考波的曲率相同, 且有相同的传播方向, 可制作无透镜式付里叶变换全息图<sup>[3]</sup>。图 2-29 就是记录这种全息图的示意图。我们说: 处在  $\xi = 0$  处的参考波在摄影胶片处产生的复数振幅分布为

$$R = R \exp \left[ j \frac{k}{2f} x^2 \right] \quad (2-95)$$

再设目标值上的一个小区域在胶片上的振幅分布为

$$T(\xi) \exp \left[ j \left( \frac{k}{2f} \right) (x - \xi)^2 \right] d\xi \quad (2-97)$$

这样, 目标在摄影胶片上产生的总场为

$$O(x) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp \left( j \frac{k}{2f} (x - \xi)^2 \right) d\xi \quad (2-97)$$

若  $\xi$  很小, 可忽略  $\xi^2$ , 则  $(x - \xi)^2 \approx x^2 - 2x\xi$ , 因此(2-97)变为

$$O(x) \approx \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp \left[ \frac{k}{2f} x^2 \right] \exp \left[ -j \frac{k}{f} x\xi \right] d\xi \quad (2-98)$$

这样一来, 记录在胶片上的强度变为

$$\begin{aligned} I(x) &= |R + O|^2 = |R|^2 + |O|^2 + R^*O + RO^* \\ &= |R|^2 + |O|^2 + R \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp \left[ -j \left( \frac{k}{f} \right) x\xi \right] d\xi \\ &\quad + R^* \int_{\xi_2}^{\xi_1} T^*(\xi) \exp \left[ j \frac{k}{f} x\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (2-100)$$

上式中的第三项和第四项可看作为目标  $T(\xi)$  的付里叶变换, 显影后的振幅透过变为(忽略前二项)

$$\begin{aligned} \tau_f(x) &= t_b + \beta' R \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\tau) \exp \left[ -j \frac{k}{f} x\xi \right] d\xi \\ &\quad + \beta' R^* \int_{\xi_1}^{\xi_2} T^*(\xi) \exp \left[ j \frac{k}{f} x\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (2-101)$$

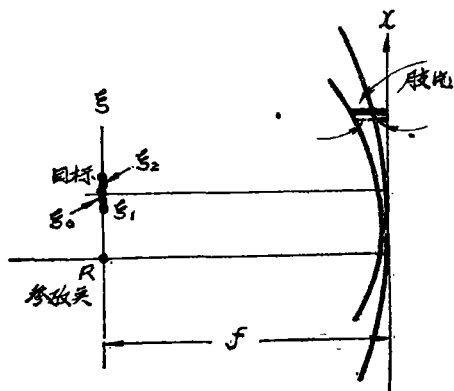


图 2-29 无透镜式付里叶变换全息图的记录

这样一来，当用参考波来照射这个全息图时，很显然，会出现原目标和它的复数共轭的付里叶变换。因此要使原目标重现，必须一个透镜才行。也就是说，把全息图放在透镜  $L_1$  的前焦面上，用参考光来照明，这样就会在透镜  $L_1$  的后焦面中重现原目标的像及其共轭像。

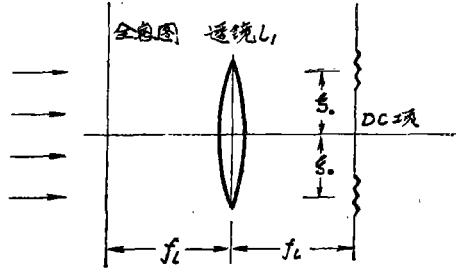


图 2—30 无透镜付里叶变换全息图的重现

如图 2—30 所示。由此我们知道，在制备无透镜式付里叶变换全息图时，只需要物体光波和参考光波的曲率相同，方向相同就可以了，无须付里叶变换透镜，然而，在重现时，为了重现原目标的像，必须有一个透镜才行。这种无透镜式付里叶变换全息图首先为 G. W. 斯特罗柯 (Stroke) 所提出<sup>[3]</sup>。

记录全息图的方式很多，除了上述介绍的外，例如还有反射全息图，在这种全息图中，物体光波和参考波以相反的方向照射胶片，在胶片的厚度方向形成驻波，有时也称这种全息图为体全息图。这种全息图可看作干涉滤频片，只有在特定波长照射下它才会使像重现，因此重现这种全息图时，只要白光就可以了。但是这种全息图对胶片要求相当高，而且在制备这种全息图时，对周围环境的要求也相当苛刻，甚至说话的声音就会导致实验的失败<sup>[4]</sup>。

### 参 考 文 献

- [1] R. N. Bracewell, "The Fourier Transform and Its Application". McGraw—Hill Book Company, New York (1965).
- [2] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw—Hill Book Company, New York (1968)
- [3] G. W. Stroke, "An Introduction to Coherent Optics and Holography", Academic Press, New York (1969)
- [4] A. R. Shulman, "Optical Data Processing" John Wiley & Sons, Inc. New York (1970)
- [5] Kendall Preston, Jr. "Coherent Optical Computer" McGraw—Hill Book Company, New York (1972)
- [6] G. C. Lendaris and G. L. Stanley, "Diffraction Pattern Sampling for Automatic Pattern Recognition", Proc. IEEE vol. 58 P198 (1970)
- [7] A. Vander Lugt, "Signal Detection by Complex Spatial Filtering", IEEE IT—10 p139(1964)
- [8] E. L. O'Neill, "Communication and Information Theory Aspects of Modern Optics" General Electric Co. Electronics Laboratory Syracuse, New York, 1962,
- [9] A. Kozma, "photographic Recording of Spatially Modulated Coherent Light", J. O. S. A. vol. 56. P428 (1966)
- [10] D. Gabor, "A. New Microscopic Principle", Nature vol 161 P777 (1948)
- [11] E. Leith and J. Upatnieks, "Reconstructed Wavefronts and Communication Theory" J. O. S. A. vol. 52 P1123 (1962)